

نظریه زبانها و ماشین ها

Automata Theory & Languages

دانشگاه آزاد مشهد - احمد خادم زاده

<http://khademzadeh.mshdiau.ac.ir>

چند مثال از کاربرد لمپ کردن

**More Applications of the
Pumping Lemma**

لم پمپ کردن

- یک زبان نامحدود L داده شده است:
- یک عدد صحیح m (طول بحرانی) وجود دارد
- که برای هر رشته $w \in L$ که $|w| \geq m$
- می توان نوشت $w = x y z$
- که $|y| \geq 1$ و $|x y| \leq m$
- به قسمی که برای $i = 0, 1, 2, \dots$ داریم $x y^i z \in L$

زبانهای منظم و زبانهای نامنظم

Non-regular languages

$$\{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$\{vv^R : v \in \{a,b\}^*\}$$

Regular languages

$$a^* b$$

$$b^* c + a$$

$$b + c(a + b)^*$$

etc...

مثال

فرضیه

– زبان زیر یک زبان منظم نیست:

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\} \quad \Sigma = \{a,b\}$$

اثبات

– از لم پمپ کردن استفاده می کنیم

مثال

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

- فرض خلف می کنیم:
– فرض می کنیم که زبان فوق منظم است.
- چون L یک زبان **نامحدود** است، لم پمپ کردن را اعمال می کنیم.

مثال

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$

- فرض می کنیم که m طول بحرانی L باشد.
- یک رشته مثل w انتخاب می کنیم که $w \in L$ و $|w| \geq m$ باشد.
- چه رشته ای را انتخاب نماییم؟
- در این مثال ما $w = a^m b^m b^m a^m$ را انتخاب می کنیم.

مثال

• بنا به لم پمپ کردن می توان نوشت: $w = a^m b^m b^m a^m = xyz$

• که باید: $|xy| \leq m, |y| \geq 1$

$$w = xyz = \underbrace{a \dots a}_{m} \underbrace{a \dots a}_{m} \underbrace{a \dots a}_{m} \underbrace{a \dots a}_{m} \underbrace{ab \dots bb \dots ba \dots a}_{z}$$

x y z

• پس: $y = a^k, 1 \leq k \leq m$

مثال

$$x y z = a^m b^m b^m a^m \quad y = a^k, \quad 1 \leq k \leq m$$

• بنا به لم پمپ کردن داریم:

$$x y^i z \in L \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

• بنابراین داریم:

$$x y^2 z \in L$$

• و داریم:

$$x y^2 z = \underbrace{a \dots a}_{m+k} \underbrace{a \dots a}_m \underbrace{a \dots a}_m \underbrace{a \dots a}_m \in L$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_x \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_y \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_y \quad \underbrace{\hspace{4.5cm}}_z$

مثال

• یعنی:

$$a^{m+k} b^m b^m a^m \in L \quad k \geq 1$$

• اما داریم:

$$L = \{vv^R : v \in \Sigma^*\}$$



$$a^{m+k} b^m b^m a^m \notin L$$

تناقض

مثال

- پس فرض اولیه ما مبنی بر منظم بودن L غلط بوده است.
- نتیجه: L منظم نیست.

انتهای اثبات

زبانهای منظم و زبانهای نامنظم

Non-regular languages

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : n, l \geq 0\}$$

Regular languages

$$a^* b$$

$$b^* c + a$$

$$b + c(a + b)^*$$

etc...

مثال

فرضیه

– زبان $L = \{a^n b^l c^{n+l} : n, l \geq 0\}$ ، منظم نیست.

اثبات

– از لم پمپ کردن استفاده می کنیم

مثال

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : n, l \geq 0\}$$

- فرض خلف می کنیم:
– فرض می کنیم که زبان فوق منظم است.
- چون L یک زبان **نامحدود** است، لم پمپ کردن را اعمال می کنیم.

مثال

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : n, l \geq 0\}$$

- فرض می کنیم که m طول بحرانی L باشد.
 - یک رشته مثل w انتخاب می کنیم که $w \in L$ و $|w| \geq m$ باشد.
 - چه رشته ای را انتخاب نماییم؟
- در این مثال ما $w = a^m b^m c^{2m}$ را انتخاب می کنیم.

مثال

• بنا به لم پمپ کردن می توان نوشت: $w = a^m b^m c^{2m} = xyz$

• که باید: $|xy| \leq m, |y| \geq 1$

$$w = xyz = \underbrace{a \dots a}_{m} \underbrace{a \dots a}_{m} \underbrace{ab \dots bc \dots cc \dots c}_{2m}$$
$$\underbrace{a \dots a}_{x} \underbrace{a \dots a}_{y} \underbrace{ab \dots bc \dots cc \dots c}_{z}$$

• پس: $y = a^k, 1 \leq k \leq m$

مثال

$$x y z = a^m b^m c^{2m} \quad y = a^k, \quad 1 \leq k \leq m$$

• بنا به لم پمپ کردن داریم:

$$x y^i z \in L \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

• بنابراین داریم:

$$x y^0 z = x z \in L$$

• و داریم:

$$x z = \underbrace{a \dots a}_{m-k} \underbrace{a \dots a}_m \underbrace{b \dots b c \dots c}_{2m} \in L$$

$$\underbrace{a \dots a}_x \underbrace{a \dots a b \dots b c \dots c}_z$$

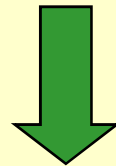
مثال

• یعنی:

$$a^{m-k} b^m c^{2m} \in L \quad k \geq 1$$

• اما داریم:

$$L = \{a^n b^l c^{n+l} : n, l \geq 0\}$$



$$a^{m-k} b^m c^{2m} \notin L$$

تناقض

مثال

- پس فرض اولیه ما مبنی بر منظم بودن L غلط بوده است.
- نتیجه: L منظم نیست.

انتهای اثبات

زبانهای منظم و زبانهای نامنظم

Non-regular languages

$$L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$$

Regular languages

a^*b

$b^*c + a$

$b + c(a + b)^*$

etc...

مثال

فرضیه

– زبان $L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$ ، یک زبان منظم نیست.

اثبات

– از لم پمپ کردن استفاده می کنیم

مثال

$$L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$$

- فرض خلف می کنیم:
– فرض می کنیم که زبان فوق منظم است.
- چون L یک زبان **نامحدود** است، لم پمپ کردن را اعمال می کنیم.

مثال

$$L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$$

- فرض می کنیم که m طول بحرانی L باشد.
- یک رشته مثل w انتخاب می کنیم که $w \in L$ و $|w| \geq m$ باشد.
- چه رشته ای را انتخاب نماییم؟
- در این مثال ما $w = a^{m!}$ را انتخاب می کنیم.

مثال

- بنا به لم پمپ کردن می توان نوشت: $w = a^{m!} = x y z$
- که باید: $|x y| \leq m, |y| \geq 1$

$$w = xyz = a^{m!} = \underbrace{a \dots a}_{m} \dots \underbrace{a \dots a}_{m! - m}$$

The diagram illustrates the decomposition of $w = a^{m!}$ into xyz . The string of $m!$ 'a's is partitioned into three parts: x (1 'a'), y (m 'a's'), and z ($m! - m - 1$ 'a's'). Brackets above the string indicate the total length of x and y (m) and the total length of the remaining part ($m! - m$). Brackets below the string indicate the length of each part: x (1), y (m), and z ($m! - m - 1$).

- پس: $y = a^k, 1 \leq k \leq m$

مثال

$$x y z = a^{m!} \quad y = a^k, \quad 1 \leq k \leq m$$

• بنا به لم پمپ کردن داریم:

$$x y^i z \in L \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$x y^2 z \in L$$

• بنابراین داریم:

• و داریم:

$$x y^2 z = \underbrace{a \dots a}_{m+k} \underbrace{a \dots a}_{m!-m} \in L$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_x \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_y \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_y \quad \underbrace{\hspace{4.5cm}}_z$

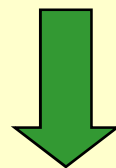
مثال

• یعنی:

$$a^{m!+k} \in L \quad 1 \leq k \leq m$$

• اما داریم:

$$L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$$



باید یک P وجود داشته باشد که: $m!+k = p!$

مثال

$$m!+k \leq m!+m$$

اما، برای $m > 1$

$$\leq m!+m!$$

$$< m!m + m!$$

$$= m!(m + 1)$$

$$= (m + 1)! \quad \Rightarrow \quad m!+k < (m + 1)!$$

$$\Rightarrow \quad m!+k \neq p! \quad (\text{برای هر } p)$$

مثال

• یعنی:

$$a^{m!+k} \in L \quad 1 \leq k \leq m$$

• اما داریم:

$$L = \{a^{n!} : n \geq 0\}$$



$$a^{m!+k} \notin L$$

تناقض

مثال

- پس فرض اولیه ما مبنی بر منظم بودن L غلط بوده است.
- نتیجه: L منظم نیست.

انتهای اثبات

پانچ

