




# نظریه زبانها و ماشین ها

## Automata Theory & Languages

دانشگاه آزاد مشهد - احمد خادم زاده  
<http://khademzadeh.mshdiau.ac.ir>



# ساده سازی گرامرهای مستقل از متن

**Simplifications of  
Context Free Grammars**

# قاعده جانشینی (Substitution Rule)

- گرامر حاصل پس از اعمال جانشینی، با گرامر اولیه معادل است.

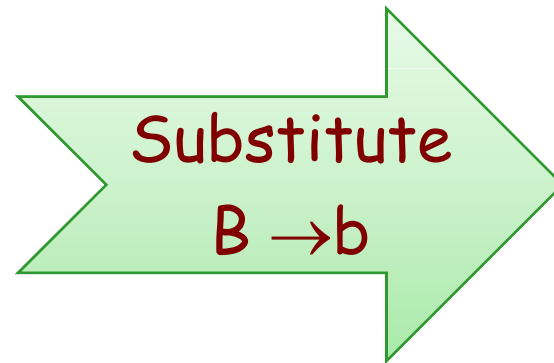
$$S \rightarrow aB$$

$$A \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow abBc$$

$$B \rightarrow aA$$

$$B \rightarrow b$$



$$S \rightarrow aB \mid ab$$

$$A \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow abBc \mid abbc$$

$$B \rightarrow aA$$

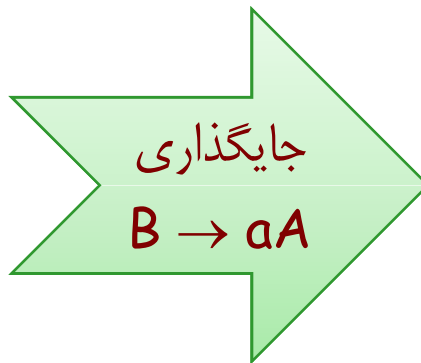
# مثال

$$S \rightarrow aB \mid ab$$

$$A \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow abBc \mid abbc$$

$$B \rightarrow aA$$



$$S \rightarrow \cancel{aB} \mid ab \mid aaA$$

$$A \rightarrow aaA$$

$$A \rightarrow \cancel{abBc} \mid abbc \mid abaAc$$

# قاعده کلی

- در حالت کلی اگر گرامری مانند گرامر زیر داشته باشیم، پس از اعمال جانشینی:

$$\begin{array}{l} A \rightarrow xBz \\ B \rightarrow y_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{جایگذاری} \\ B \rightarrow aA \end{array} \quad A \rightarrow xBz \mid xy_1z$$

- گرامر حاصل با گرامر اولیه معادل خواهد بود.

# متغیر های قابل تهی شدن (Nullable Variables)

- قاعده تولید تهی ( $\lambda$ -production):  $X \rightarrow \lambda$
- متغیر قابل تهی شدن:  $Y \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda$
- مثال:

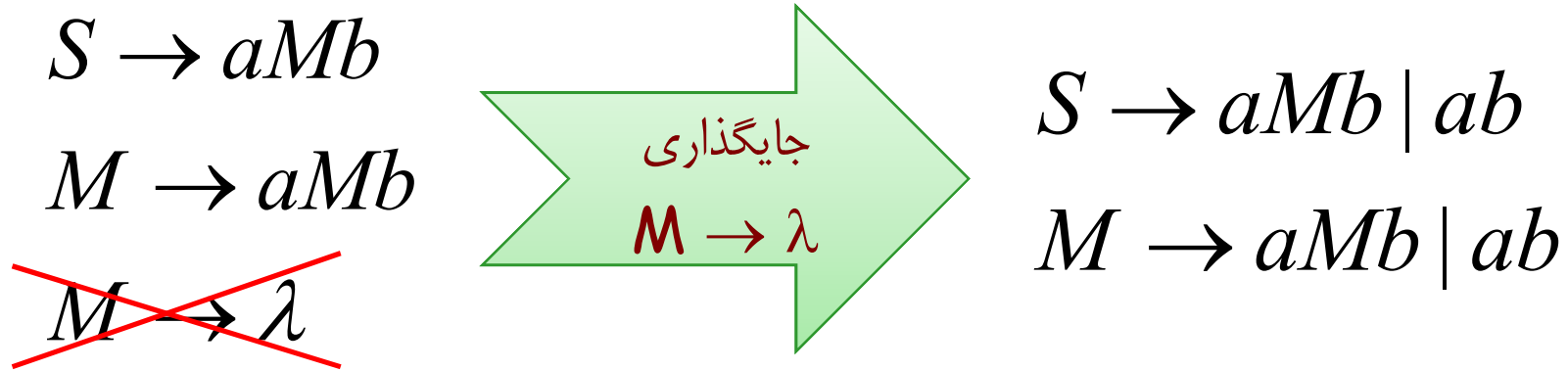
$$S \rightarrow aMb$$

$$M \rightarrow aMb$$

$$M \rightarrow \lambda$$

- قاعد آخر، قاعده تولید لمدا، و  $M$  متغیر قابل تهی شدن است.

# حذف قواعد تولید تهی



- پس از حذف تمام قواعد تولید تهی، تمام متغیرهای قابل تهی شده حذف خواهند شد.

– حالت شروع در این مورد استثنا است.

# قواعد واحد (Unit-Productions)

$$X \rightarrow Y$$

• قاعده واحد:

– در هر سمت یک غیرپایانه قرار گرفته است.

• مثال:

$$S \rightarrow aA$$

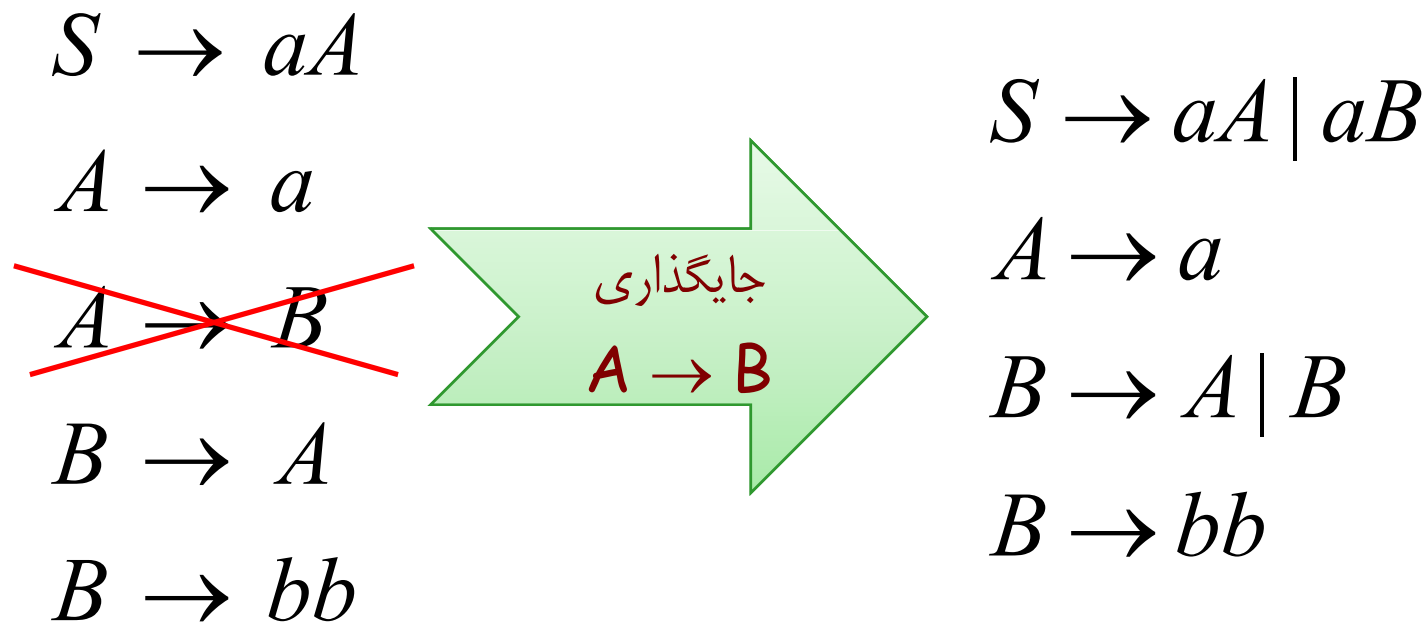
$$A \rightarrow a$$

$$A \rightarrow B$$

$$B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow bb$$

# حذف قواعد واحد



# حذف قواعد واحد

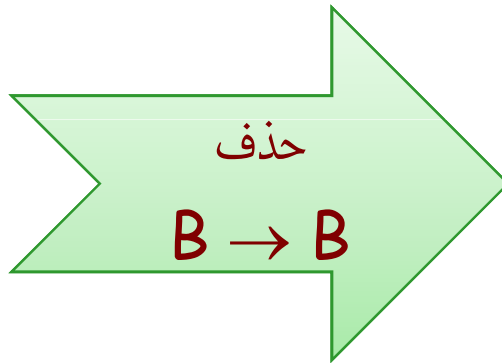
- قواعد واحدی مثل  $X \rightarrow X$  را می توان بدون هیچ جایگزینی حذف نمود:

$$S \rightarrow aA \mid aB$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow A \mid \cancel{B}$$

$$B \rightarrow bb$$



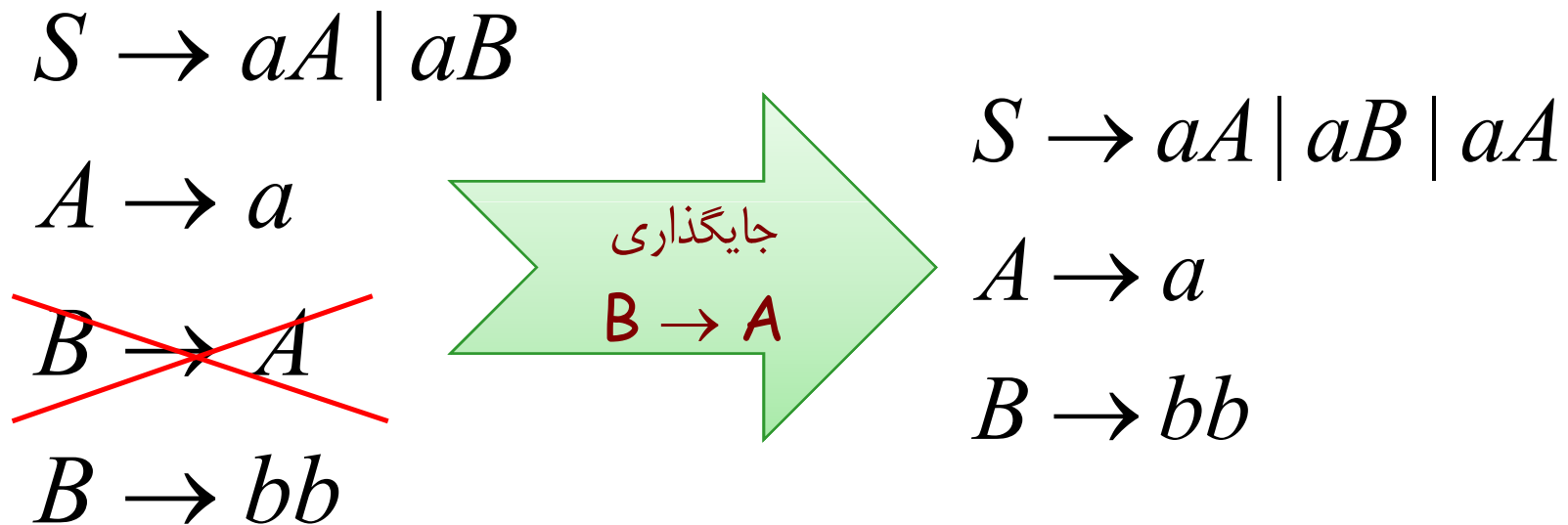
$$S \rightarrow aA \mid aB$$

$$A \rightarrow a$$

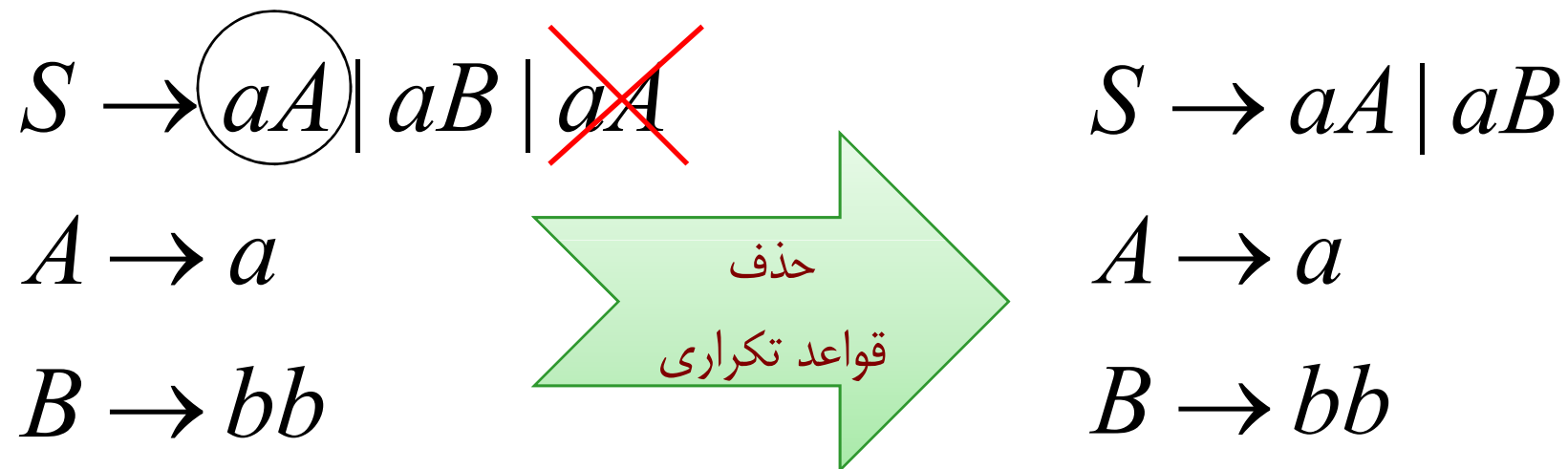
$$B \rightarrow A$$

$$B \rightarrow bb$$

# حذف قواعد واحد



# حذف قواعد تکراری



# قواعد بی فایده (Useless Productions)

• مثال:

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \lambda$$

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow aA$$

• چرا این قواعد را حذف می کنیم؟

– برخی اشتقاق ها، قابل خاتمه نیستند. مثال:

$$S \Rightarrow A \Rightarrow aA \Rightarrow aaA \Rightarrow \dots \Rightarrow aa \dots aA \Rightarrow \dots$$

# مثال

$$S \rightarrow A$$

$$A \rightarrow aA$$

$$A \rightarrow \lambda$$

$$B \rightarrow bA$$

- کدام قاعده بی فایده است؟ چرا؟  
– چون از  $S$  قابل دسترس نیست.

# قاعده کلی

- اگر اشتقاقی مانند:

$$S \Rightarrow \dots \Rightarrow xAy \Rightarrow \dots \Rightarrow w \in L(G)$$

- وجود داشته باشد که در آن  $w$  متشکل از پایانه هاست، آنگاه:

– متغیر  $A$  مفید است

- در غیر اینصورت:

– متغیر  $A$  بی فایده است.

# نتیجه

- قاعده تولیدی مثل  $A \rightarrow \alpha$  بی فایده است اگر  
– یکی از متغیرهای موجود در این قاعده بی فایده باشد.

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \lambda$$

قواعد:

متغیرها

$$S \rightarrow A$$

**useless**

**useless**

$$A \rightarrow aA$$

**useless**

**useless**

$$B \rightarrow C$$

**useless**

**useless**

$$C \rightarrow D$$

**useless**

# مثال

- حذف متغیرها و قواعد بی فایده

- گرامر:

$$S \rightarrow aS \mid A \mid C$$

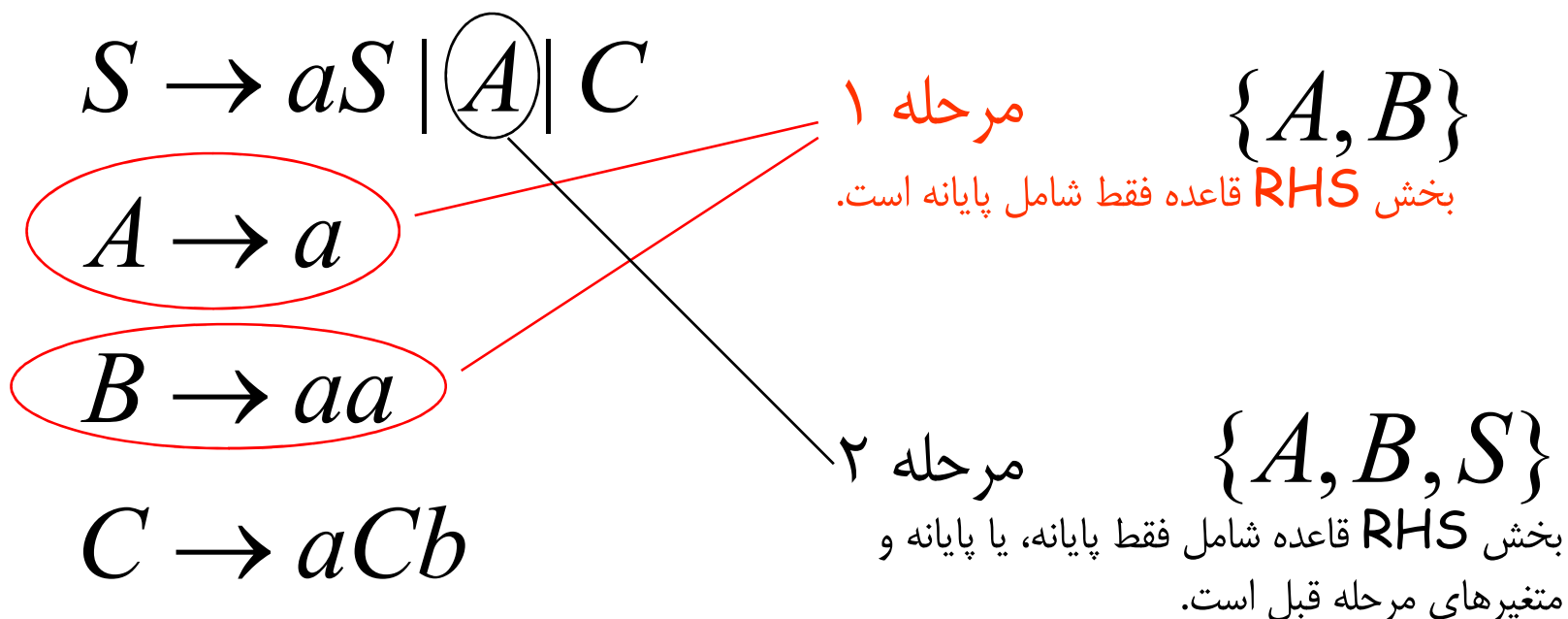
$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow aa$$

$$C \rightarrow aCb$$

# مثال

- **قدم اول:** تمام متغیرهایی که می توانند رشته های شامل فقط پایانه یا  $\lambda$  تولید کنند، را می یابیم (متغیرهای احتمالا مفید)



# مثال

- سپس، قواعد تولیدی که از متغیرهایی به جز  $\{A, B, S\}$  استفاده می کنند را حذف می کنیم.

$$\begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid A \mid C \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow aa \\ \cancel{C \rightarrow aCb} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} S \rightarrow aS \mid A \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow aa \end{array}$$

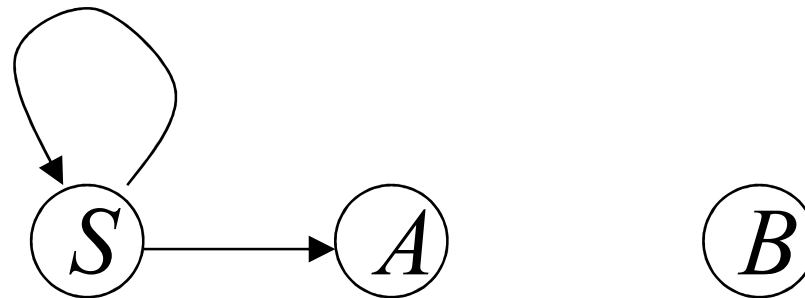
# مثال

- **قدم دوم:** تمام متغیرهای قابل دسترس از  $S$  را می یابیم.  
– به این منظور از یک گراف وابستگی استفاده می کنیم، که نودهای آن متغیرهای گرامر هستند.

$$S \rightarrow aS \mid A$$

$$A \rightarrow a$$

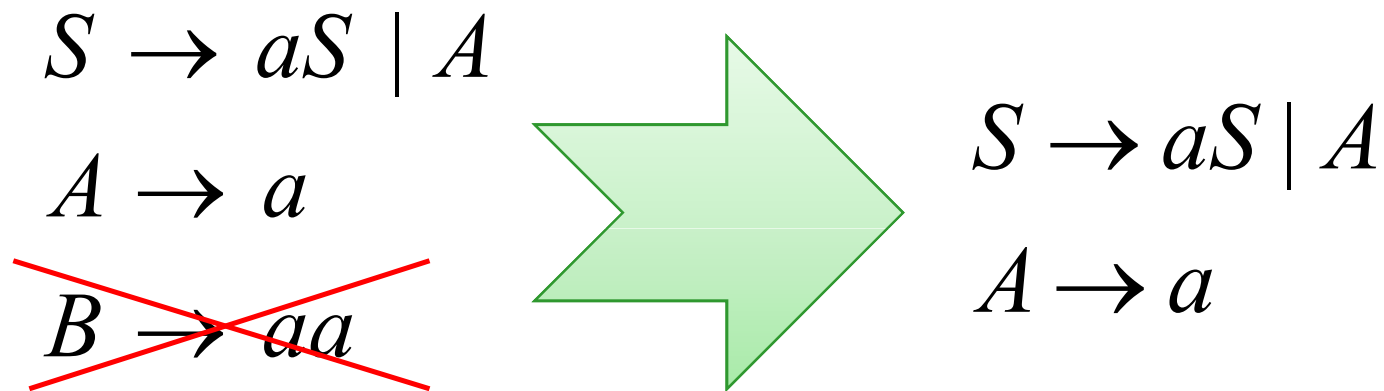
$$B \rightarrow aa$$



- در این مثال  $B$  غیر قابل دسترس از  $S$  است.

# مثال

- فقط متغیرهای قابل دسترس از  $S$  را نگه می داریم.



- به این ترتیب گرامر نهایی که فقط شامل متغیرهای مفید است، حاصل می شود.

# حذف همه ناخواسته ها!

- قدم اول: حذف متغیرهای قابل تهی شدن
- قدم دوم: حذف قواعد واحد
- قدم سوم: حذف متغیرهای بی فایده
- با انجام قدم های فوق، به گرامری می رسیم که متغیرهای و قواعد ناخواسته از آن حذف شده اند.

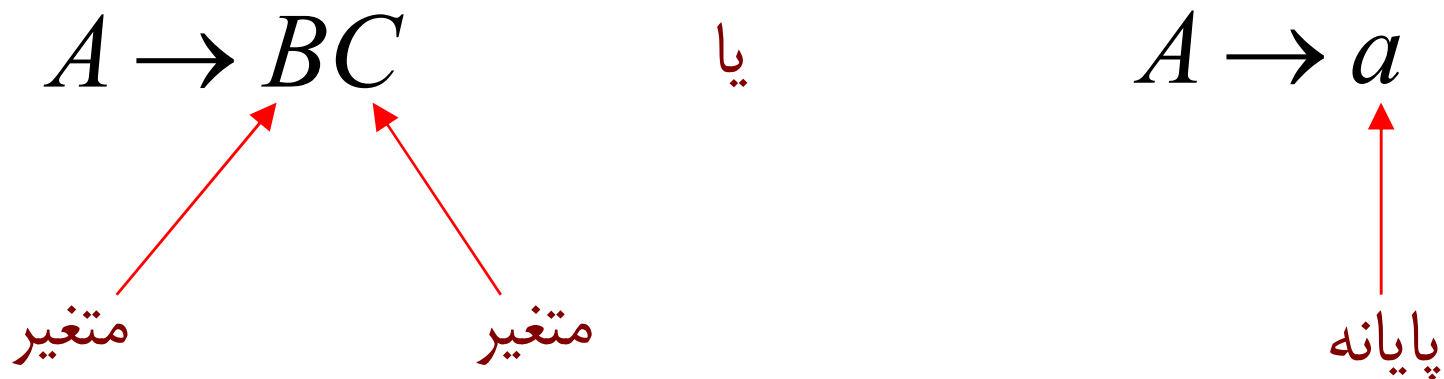
# فرم نرمال گرامرهای مستقل از متن

**Normal Forms for  
Context Free Grammars**



# فرم نرمال چامسکی (Chomsky Normal Form)

- هر قاعده دارای یکی از فرمهای زیر است:



# مثال

$$S \rightarrow AS$$

$$S \rightarrow a$$

$$A \rightarrow SA$$

$$A \rightarrow b$$

Chomsky  
Normal Form

$$S \rightarrow AS$$

$$S \rightarrow AAS$$

$$A \rightarrow SA$$

$$A \rightarrow aa$$

Not Chomsky  
Normal Form

# تبدیل به فرم نرمال چامسکی

• مثال:

$$S \rightarrow ABa$$

$$A \rightarrow aab$$

$$B \rightarrow Ac$$

– گرامر روبرو در فرم نرمال چامسکی نیست.

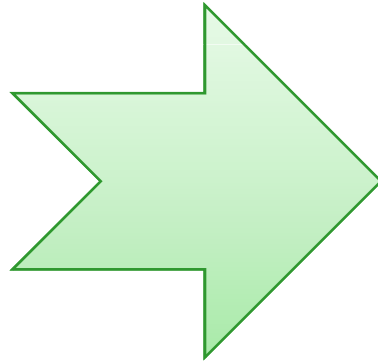
# تبدیل به فرم نرمال چامسکی

- متغیرهای جدیدی برای پایانه ها معرفی می کنیم:  $T_a, T_b, T_c$

$$S \rightarrow ABa$$

$$A \rightarrow aab$$

$$B \rightarrow Ac$$



$$S \rightarrow ABT_a$$

$$A \rightarrow T_a T_a T_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$

# تبدیل به فرم نرمال چامسکی

- برای شکستن قاعده اول، چه کنیم؟

$$S \rightarrow ABT_a$$

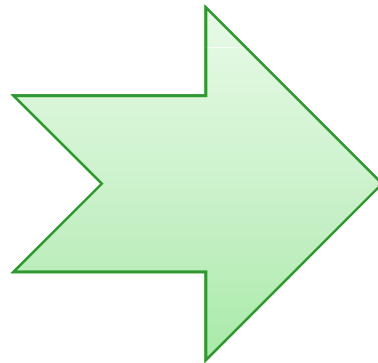
$$A \rightarrow T_a T_a T_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$



$$S \rightarrow AV_1$$

$$V_1 \rightarrow BT_a$$

$$A \rightarrow T_a T_a T_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$

# تبدیل به فرم نرمال چامسکی

- متغیر جدیدی با نام  $V_2$  نیز معرفی می کنیم.

$$S \rightarrow AV_1$$

$$V_1 \rightarrow BT_a$$

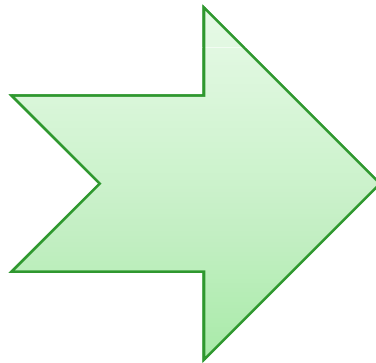
$$A \rightarrow T_aT_aT_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$



$$S \rightarrow AV_1$$

$$V_1 \rightarrow BT_a$$

$$A \rightarrow T_aV_2$$

$$V_2 \rightarrow T_aT_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$

# تبدیل به فرم نرمال چامسکی

- گرامر نهایی زیر به فرم نرمال چامسکی می باشد:

$$S \rightarrow ABa$$

$$A \rightarrow aab$$

$$B \rightarrow Ac$$

$$S \rightarrow AV_1$$

$$V_1 \rightarrow BT_a$$

$$A \rightarrow T_aV_2$$

$$V_2 \rightarrow T_aT_b$$

$$B \rightarrow AT_c$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

$$T_c \rightarrow c$$

# فرم نرمال چامسکی

- در حالت کلی

– برای هر گرامر مستقل از متنی (که رشته تهی را تولید نمی کند)، و در فرم نرمال چامسکی نیست،

- می توانیم گرامری بیابیم که:

– معادل آن گرامر باشد و در فرم نرمال چامسکی باشد.

# روال تبدیل به فرم نرمال چامسکی

- ابتدا

- متغیر های قابل تهی شدن،

- قواعد واحد،

- را حذف می کنیم.

- قواعد بی فایده چطور؟

# روال تبدیل به فرم نرمال چامسکی

- برای هر پایانه مثل  $a$ 
  - یک متغیر  $T_a$  تعریف می کنیم.
  - قاعده  $T_a \rightarrow a$  را به مجموعه قواعد می افزاییم.
- در همه قواعد  $a$  را با  $T_a$  جایگزین می کنیم.
  - این کار برای قواعدی به فرم  $A \rightarrow b$  لازم نیست.

# روال تبدیل به فرم نرمال چامسکی

• تمام قواعد به فرم  $A \rightarrow C_1 C_2 \dots C_n$  را با

$$A \rightarrow C_1 V_1$$

$$V_1 \rightarrow C_2 V_2$$

...

$$V_{n-2} \rightarrow C_{n-1} C_n$$

• جایگزین می کنیم.

# مشاهده

- فرم نرمال چامسکی برای تجزیه و اثبات تئوری ها مناسب است.
- بدست آوردن فرم نرمال چامسکی برای هر گرامر مستقل از متنی که رشته تهی را تولید نمی کند، کار آسانی است.

$\lambda$

# فرم نرمال گریباخ (Greinbach Normal Form)

- باید تمام قواعد دارای فرم زیر باشند:

$$A \rightarrow a V_1 V_2 \cdots V_k \quad k \geq 0$$

پایانه

متغیر

# مثال

$$S \rightarrow cAB$$

$$A \rightarrow aA \mid bB \mid b$$

$$B \rightarrow b$$

Greinbach  
Normal Form

$$S \rightarrow abSb$$

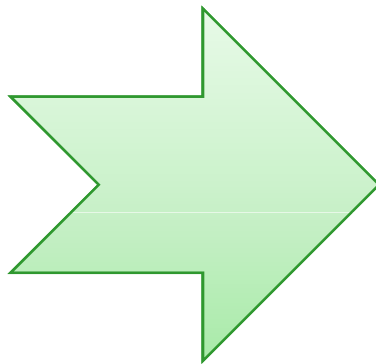
$$S \rightarrow aa$$

Not Greinbach  
Normal Form

# تبدیل به فرم نرمال گریباخ

$$S \rightarrow abSb$$

$$S \rightarrow aa$$



$$S \rightarrow aT_bST_b$$

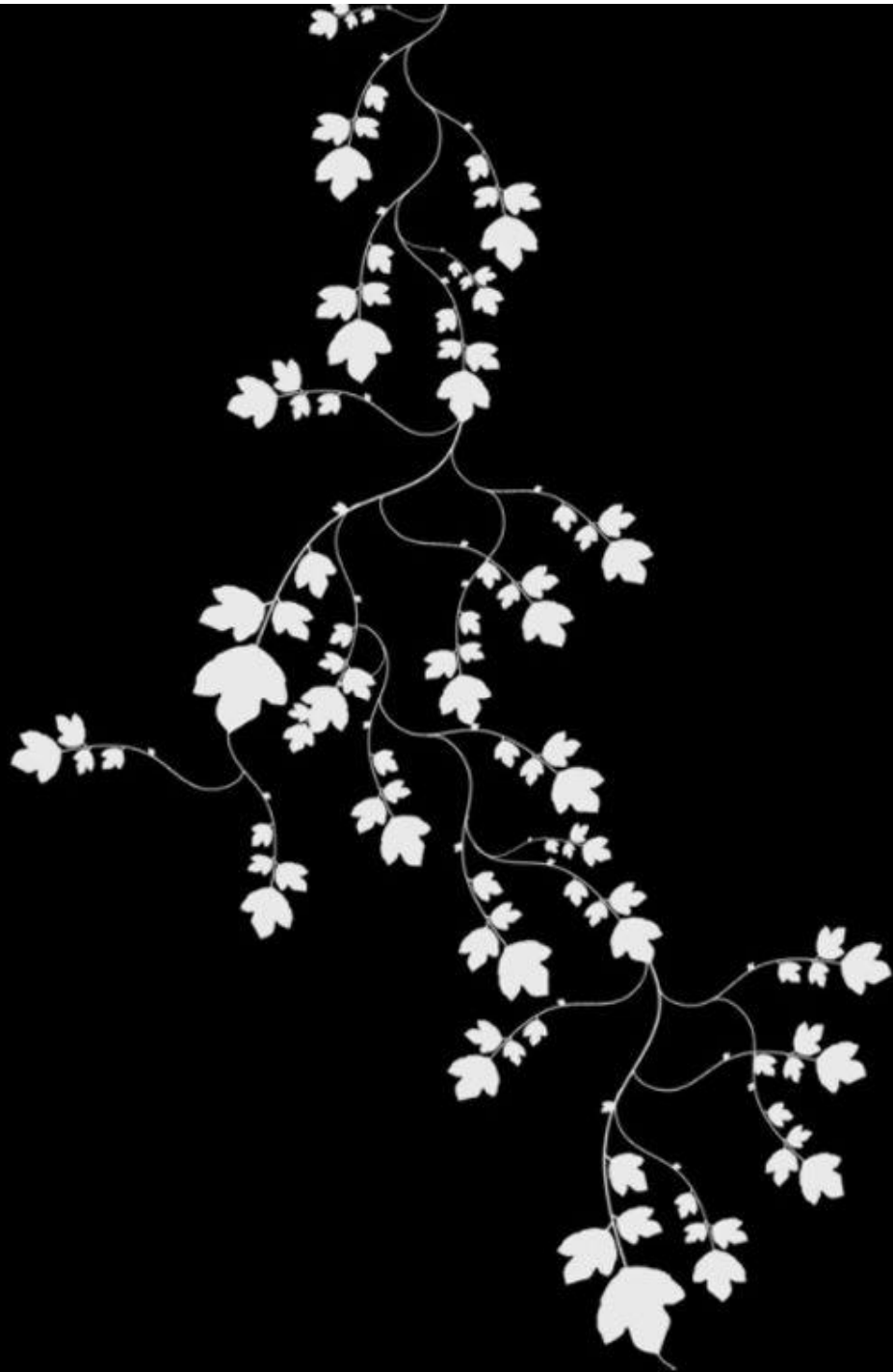
$$S \rightarrow aT_a$$

$$T_a \rightarrow a$$

$$T_b \rightarrow b$$

# مشاهده

- فرم نرمال گریباخ برای تجزیه مناسب است.  
– از فرم نرمال چامسکی بهتر است.
- اما تبدیل به فرم نرمال گریباخ مشکل تر است.



پایان

